籤引きの原理

栗野俊一*

2014 年 10 月 17 日

1　籤引きの原理

自然数 m, n, k に対して、$m \geq n, m \geq k$ の関係が成り立っている[*1] とする。この時、m 本の籤の中に n 本の当たり (と、$m-n$ 本の外れ) 籤が含まれる籤引きを考え、これを k 人の人間が、順に籤を引く事を考える。

ただし、前の人が引いた籤は、当たり、外れに限らず、元に戻さないとする。

この問題を $S(m,n,k)$ で表す事にする。

この時、j 番目に籤を引く人が、当たり籤を引く確率 ($P(j)$) が、j に無関係に $P(j) = \dfrac{k}{n}$ と、全て同じ値になる。

この「籤を引く順序が、当たりを引く確率に影響しない (籤引きは公平である) という性質」を、籤引きの原理と呼ぶ。

2　「籤引きの原理」の意味

数学的な話ではないが、数学の外の立場から、「籤引きの原理」に関する話を二つする事にする。

2.1　応用の観点

一つ目は、応用の観点であり、この原理が、「籤引きが公平である」という考えの基本原理になっているという事である。数学的な事実として「引く順序 j に拘わらず $P(j)$ が全て等しい」は、単なる結果でしかないが、応用の立場から、この性質が「好ましい性質として捉えらえている」という事は、十分に認識しておくべきである。

数学は単独で完成された学問であるが、常に応用と結び付ける事により、直観の豊さが増し、理解を進める事ができるようになる。

特に、「順番に無関係に確率は変らない」という「直観」は、この問題を理解するための、もう一つの視点を与える事になる (節 3.3.2 参照)。

* 日本大学理工学部数学科<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

*1 これは、単に、以下の「籤引き」という問題のための仮定である。籤の本数 m は、当たり籤の本数 n 以上でなければならず、また、引く人数 k も籤の数 m 以下でなければならない。

2.2 人間の活動としての数学の観点

二つ目は、人間の活動としての数学の観点であり、数学と直観との関係である。

数学は直観と論理の両輪によって進む学問である。直観無き論理は空疎であり、論理無き直観は単なる妄想でしかない。

籤引きの原理は、一見、ある種の直観に反しているように感じられる。

実際、「早い者勝ち」、「残り物に福がある」という二つの格言は、籤引きに対する、典型的な「直観」的認識で、しかも、同じ対象に対して、全く反対の結論を導き出している。

前者の「論理」は、「最初の方に籤を引いた人が、当たり籤を全て引き切ってしまったら、後の人間は籤を引く意味がなくなってしまう」ので、「後の方が不利」というものである。そして、後者の「論理」は、「最初の方は、(一般に..) 当たり籤より外れ籤の方が多いので、多くの場合、外れ籤の方が先に出るだろう、そうすれば、残りは外れ籤の本数が減るので、当たり籤を引く確率が高くなる」ので、「後の方が有利」というものである。

共に、「もっとらしく、論理的に感じられる[*2]」のであるが、結果的に、この籤に関して言えば、この二つの「直観」は何れも間違っている (論理性に欠けている..) [*3]。

「直観」は、人間の経験に基く物であり、しかも、経験は、必ずしも全ての情報が与えられた状況で得られるわけではない[*4]。したがって、「直観で得られた結果」に対しては、常に「正しいかどうかを論理で検査する」必要がある。

これは、結局、「数学をするのは人間」であり、「人間は常に論理的な形で結論を出すわけではない[*5]」ので、「意識的に、『直観を論理で検査する』ようにする必要」があるわけである。

3 「籤引きの原理」の証明

3.1 樹形図を用いる方法

まずは、籤引きの順番に従って、条件付き確率を求める事にしよう。

一人目 最初に籤を引く人の当たり籤を引く確率 $P(1)$ は、籤引きの状況が一通り (m 本の籤の中に n 本の当たり籤が含まれる) しかなく、その当たり籤を引く確率 $P(1)$ は $\dfrac{n}{m}$ となる。

二人目 次の二人目の当たり籤を引く確率 $P(2)$ を計算するには、一度目の籤引きで、当たりが出た場合と、

[*2] 興味深いのは、この二つの推論は、間違っていない事である。間違っているのは、推論にではなく、「最初に籤を引く人間に起きる現象」に対する、(直観による..) 勝手な評価 (前者は、当たり籤を引く、後者は、外れ籤を引く) を仮定してしまっている事である。その仮定が成立しないので、正しい結論が導けていないだけである。

しかし、逆に、その仮定が成立するのであれば、結論の正しさが、導かれるという意味で、推論は適切であり、その結果「もっとらしく感じる」のである。

[*3] もちろん、だからといって、この二つの格言に意味がないという事ではない。前者は、「何かを成す場合の積極性」を評価したものであり、その一方、後者は、「何かを成す場合の計画性」を評価したという「評価の立場の違い」でしかなく、しかも、一般には、「物事 (数学に限定しない..) を成す」上で、その両方が重要である事は言うまでもないだろう。

[*4] ので、経験時に、「正しくない内容」を推測しても、「それが否定されない (それと矛盾する情報があれば、それを、否定できるのだが、それが得られないので...)」可能性があり、その結果として、「誤りを含む内容」が「経験として積まれてしまう」事が生じてしまう。

[*5] 何故なら、経験において、全ての情報が得られていないとするならば、(情報不足によって..) そもそも、論理的に答えを出す事ができない場合も有り得るわけであるが、人間は、その様な場合でも (直観を用いて..) 何らかの形で、答えを出す必要があるため、「論理だけに頼る事はできない」のである。しかも、日常的には、そのような (答えを出すのに、論理だけでは解決できず)、直観を必要とする場合が殆どである。

出なかった場合の二つに、場合分けをして考えると良い。

一人目が当った場合の条件付き確率　一人目が当った場合は、当たり籤の本数が一本減り、$n-1$ となる。従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $H(2)$ は、$\dfrac{n-1}{m-1}$ となる。

一人目が外れた場合の条件付き確率　一人目が外れた場合は、当たり籤の本数は変らず n なので、従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $M(2)$ は、$\dfrac{n}{m-1}$ となる。

よって、求める結果は、

$$\begin{aligned}
P(2) &= P(1) \times H(2) + (1 - P(1)) \times M(2) \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{n-1}{m-1} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \frac{n}{m-1} \\
&= \frac{n(n-1)}{m(m-1)} + \frac{(m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n(n-1) + (m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1) + (m-n)}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{m-1}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \\
&= P(1)
\end{aligned}$$

となり、確かに、$P(1)$ と一致する。

三人目　三人目の当たり籤を引く確率 $P(3)$ を計算するには、一度目の籤引きで、当たりが出た場合と、出なかった場合の 2 つと二度目の籤引きで、当たりが出た場合と、出なかった場合の 2 つとの組み合わせ $\{<\text{当},\text{当}>, <\text{当},\text{外}>, <\text{外},\text{当}>, <\text{外},\text{外}>\}$ の合計、4 つの場合分けをして考えると良い。それぞれの結果は以下の様になる。

$<$ **当, 当** $>$

$$\frac{n}{m} \times \frac{n-1}{m-1} \times \frac{n-2}{m-2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)}$$

$<$ **当, 外** $>$

$$\frac{n}{m} \times \left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right) \times \frac{n-1}{m-2} = \frac{n(m-n)(n-1)}{m(m-1)(m-2)}$$

$<$ **外, 当** $>$

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \frac{n}{m-1} \times \frac{n-1}{m-2} = \frac{(m-n)n(n-1)}{m(m-1)(m-2)}$$

$<$ **外, 外** $>$

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \left(1 - \frac{n}{m-1}\right) \times \frac{n}{m-2} = \frac{(m-n)(m-n-1)n}{m(m-1)(m-2)}$$

この結果を全て加えると

$$
\begin{aligned}
P(3) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{m(m-1)(m-2)} + \frac{n(m-n)(n-1)}{m(m-1)(m-2)} + \frac{(m-n)n(n-1)}{m(m-1)(m-2)} + \frac{(m-n)(m-n-1)n}{m(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2) + n(m-n)(n-1) + (m-n)n(n-1) + (m-n)(m-n-1)n}{m(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1)(n-2) + (m-n)(n-1) + (m-n)(n-1) + (m-n)(m-n-1)}{(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1)\{(n-2)+(m-n)\} + (m-n)\{(n-1)+(m-n-1)\}}{(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1)(m-2) + (m-n)(m-2)}{(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(m-2)\{(n-1)+(m-n)\}}{(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(m-2)(m-1)}{(m-1)(m-2)} \\
&= \frac{n}{m} \\
&= P(1)
\end{aligned}
$$

となり、確かに、$P(1)$ と一致する。

j 人目 $P(j)$ の計算で、それまでの $1..j-1$ の人の籤の出方によって、場合分けをすると、個々の籤は、当たりか外れかの 2 通りなので、その組み合わせは、最大 2^{j-1} 通りある。

その組み合わせを $< g_1, g_2, .., g_{j-1} >$ $(g_i \in \{\text{当}, \text{外}\}, i = 1, .., j-1)$ とする。また、その状況がおきる確率を $P(< g_1, g_2, .., g_{j-1} >)$、その内、当たりの出た本数を $N(< g_1, g_2, .., g_{j-1} >)$ で表す事にする。

すると、求める確率 $P(j)$ は、次の式によって、求める事ができる。

$$
P(j) = \sum_{g_1 \in \{\text{当}, \text{外}\}, .., g_{j-1} \in \{\text{当}, \text{外}\}, N(<g_1, g_2, .., g_{j-1}>) \le n} P(< g_1, g_2, .., g_{j-1} >) \times \frac{n - N(< g_1, g_2, .., g_{j-1} >)}{m - j + 1}
$$

ここで、この和を $< g_1, g_2, .., \text{当} >$ の場合と $< g_1, g_2, .., \text{外} >$ の場合のように、前の $1, .., j-2$ 迄は、同じだが、最後の $j-1$ 回目だけが異るような場合の二つを一組にして考える事にする。

今、

$$
\begin{aligned}
n' &= N(< g_1, g_2, .., g_{j-2} >) \\
p' &= P(< g_1, g_2, .., g_{j-2} >)
\end{aligned}
$$

とすると、N の定義により、

$$
\begin{aligned}
N(< g_1, g_2, .., g_{j-2}, \text{当} >) &= N(< g_1, g_2, .., g_{j-2}) = n' + 1 \\
N(< g_1, g_2, .., g_{j-2}, \text{外} >) &= N(< g_1, g_2, .., g_{j-2}) = n'
\end{aligned}
$$

なので、これから、

$$P(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{当}>) = p' \times \frac{n-n'}{m-j+2}$$
$$P(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{外}>) = p' \times \left(1-\frac{n-n'}{m-j+2}\right)$$

となる。
一方、この場合に、次の j 番目が当たりを引く条件付き確率は、それぞれ、

$$\text{一つ前が当たりの場合}:\frac{n-n'-1}{m-j+1}$$
$$\text{一つ前が外れの場合}:\frac{n-n'}{m-j+1}$$

となり、これから、この二つの場合の確率の和は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= P(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{当}>) \times \frac{n-N(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{当}>)}{m-j+1} \\
&+ P(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{外}>) \times \frac{n-N(<g_1,g_2,..,g_{j-2},\text{外}>)}{m-j+1} \\
&= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2} \times \frac{n-n'-1}{m-j+1} + p' \times \left(1-\frac{n-n'}{m-j+2}\right) \times \frac{n-n'}{m-j+1} \\
&= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2} \times \left(\frac{n-n'-1}{m-j+1} + \frac{(m-j+2)-(n-n')}{m-j+1}\right) \\
&= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2} \times \left(\frac{(n-n'-1)+[(m-j+2)-(n-n')]}{m-j+1}\right) \\
&= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2} \times \left(\frac{m-j+1}{m-j+1}\right) \\
&= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2}
\end{aligned}$$

ここで、p', n' を戻してみると、この式は、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= p' \times \frac{n-n'}{m-j+2} \\
&= P(<g_1,g_2,..,g_{j-2}) \times \frac{n-N(<g_1,g_2,..,g_{j-2}>)}{m-j+2}
\end{aligned}$$

となる。これは、$j-2$ 番目の総和の項目の一つとなっている。すなわち、

$$
\begin{aligned}
P(j) &= \sum_{g_1 \in \{\text{当}, \text{外}\}, .., g_{j-1} \in \{\text{当}, \text{外}\}, N(<g_1, g_2, .., g_{j-1}>) \leq n} P(<g_1, g_2, .., g_{j-1}>) \times \frac{n - N(<g_1, g_2, .., g_{j-1}>)}{m - j + 1} \\
&= \sum_{g_1 \in \{\text{当}, \text{外}\}, .., g_{j-2} \in \{\text{当}, \text{外}\}, N(<g_1, g_2, .., g_{j-2}>) \leq n} \left(P(<g_1, g_2, .., g_{j-2}, \text{当}>) \times \frac{n - N(<g_1, g_2, .., g_{j-2}, \text{当}>)}{m - j + 1} + \right. \\
&= \sum_{g_1 \in \{\text{当}, \text{外}\}, .., g_{j-2} \in \{\text{当}, \text{外}\}, N(<g_1, g_2, .., g_{j-2}>) \leq n} P(<g_1, g_2, .., g_{j-2}>) \times \frac{n - N(<g_1, g_2, .., g_{j-2}>)}{m - j + 1} \\
&= P(j-1)
\end{aligned}
$$

となり、$P(j) = P(j-1)$ が示される。同様にして、これは $P(j-2) = .. = P(2) = P(1) = \frac{n}{m}$ となる事が解る。

以上により、籤の原理が成り立つ。

3.2 数学的 (構造) 帰納方法を用いる方法

$S(m, n, k)$ の時の j 番目の人が当たりを引く確率を $P_n^m(j)$ で表す事にする。
次の自然数 m に関する命題 $Q(m)$ を考えてみよう。

$$Q(m) \equiv \text{「任意の } 0 \leq n \leq m, k = m \text{ における籤引き } S(m, n, k) \text{ に対して } P_n^m(j) = \frac{n}{m} \text{」}$$

$k = m$ の場合に $P_n^m(j) = \dfrac{n}{m}$ が成立すれば、明かに、$k < m$ の場合でも成立するので、$k = m$ に議論を絞ってよい。

また、節 3.1 で示した様に、$P_n^m(1) = \dfrac{n}{m}$ である。

したがって、ここでは $P_n^m(j) = \dfrac{n}{m}$ $(j = 2, .., k = m)$ を示めす事にする。

以下に、この $Q(m)$ が、任意の自然数 m で成立する事を数学的帰納法によって証明する。

$m = 1, 2$ **の時**　これは、既に、節 3.1 で示した。

$m = i \geq 2$ **の時に成立すると仮定して** $m = i + 1$ **の場合を示す**　節 3.1 と同様に、$j = 1$ の時、$j = 2$ の時、そして、一般の場合の値を、そろぞれ計算する事にする。

- $j = 1$ **の時**　既に、節 3.1 で示したように、$P_n^m(1) = \dfrac{n}{m}$ である。
- $j = 2$ **の時**　同じく、節 3.1 で示したように、再び、一人目が、当たり籤を引いた場合と外れ籤を引いた場合の二つの場合に場合分けを行って、$P_n^m(2) = P_n^m(1) = \dfrac{n}{m}$ を示す事にする (以下は、節 3.1 の証明と同じ証明である)。
  - **一人目が当った場合の条件付き確率**　一人目が当った場合は、当たり籤の本数が一本減り、$n - 1$ となる。従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $H_n^m(2)$ は、$\dfrac{n-1}{m-1}$ となる。
  - **一人目が外れた場合の条件付き確率**　一人目が外れた場合は、当たり籤の本数は変らず n なので、従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $M_n^m(2)$ は、$\dfrac{n}{m-1}$ となる。

よって、求める結果は、

$$
\begin{aligned}
P_n^m(2) &= P_n^m(1) \times H_n^m(2) + (1 - P_n^m(1)) \times M_n^m(2) \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{n-1}{m-1} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \frac{n}{m-1} \\
&= \frac{n(n-1)}{m(m-1)} + \frac{(m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n(n-1) + (m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1) + (m-n)}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{m-1}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \\
&= P_n^m(1)
\end{aligned}
$$

となり、確かに、$P_n^m(1)$ と一致する。

一般の $j \geq 3$ の時　さて、次に、$P_n^m(j) = \frac{n}{m}\ (j \geq 3)$ を示す事にするが、この時、一人目の籤が引かれた後の状況を考えると、$H_n^m(j)$ は、$S(m-1, n-1, k-1)$ の時の $P_{n-1}^{m-1}(j-1)$ である。したがって、帰納法の仮定より、$H_n^m(j) = P_{n-1}^{m-1}(j-1) = \frac{n-1}{m-1} = P_{n-1}^{m-1}(1) = H_n^m(2)$ が成立する。また、同様にして、$M_n^m(j) = P_n^{m-1}(j-1) = \frac{n}{m-1} = P_n^{m-1}(1) = M_n^m(2)$ である。すなわち、$P_n^m(j) = P_n^m(1) = \frac{n}{m}$ の証明は、以下のように、$P_n^m(2)$ と全く同じように行う[*6] 事ができる。

一人目が当った場合の条件付き確率　一人目が当った場合は、当たり籤の本数が一本減り、$n-1$ となる。従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $H_n^m(j)$ は、$\frac{n-1}{m-1}$ となる。

一人目が外れた場合の条件付き確率　一人目が外れた場合は、当たり籤の本数は変らず n なので、従って、この状態で、当たり籤を引く条件付き確率 $M_n^m(j)$ は、$\frac{n}{m-1}$ となる。

[*6] このように、「ある命題が正しい」事が証明されている時に、「別の命題」に対して、「その証明の形が同じ」ならば、「その命題も正しい」事がいえる。
つまり、「証明の内容」をチェックせず、「証明の形」をチェックするだけで判断をしている事になる。
このような証明を「メタ証明 (証明を対象とする証明)」と呼ぶ。

よって、求める結果は、

$$\begin{aligned}
P_n^m(j) &= P_n^m(1) \times H_n^m(j) + (1 - P_n^m(1)) \times M_n^m(j) \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{n-1}{m-1} + \Big(1 - \frac{n}{m}\Big) \times \frac{n}{m-1} \\
&= \frac{n(n-1)}{m(m-1)} + \frac{(m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n(n-1) + (m-n)n}{m(m-1)} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{(n-1) + (m-n)}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \times \frac{m-1}{m-1} \\
&= \frac{n}{m} \\
&= P_n^m(1)
\end{aligned}$$

となり、確かに、$P_n^m(1)$ と一致する。

すなわち、$m = i + 1$ の場合も $P_n^m(j) = \dfrac{n}{m}\,(j = 1, .., k = m)$ となり、$Q(m) = Q(i+1)$ も成立する。

以上により、$m = 1, 2$ の時に $Q(m)$ が成立し、$Q(i)\,(i \geq 1)$ が成立したと仮定すると、$Q(i+1)$ も成立する事が示されたので、数学的帰納法により、任意の自然数 m に対して、$Q(m)$ が成立する。

3.3　現象全体を用いる方法

3.3.1　直観の利用

「籤引きの原理が直観と反すると感じる」のは、「時間順序がある」ので、「因果関係を持つ (つまり、先の籤引きの結果が後の籤引きに影響する)」と感じられるのに、「籤引きの原理」が、「影響がない (因果関係を否定している)」事を示すからである。

実際、節 3.1 での確率の計算でも、二人目以後の籤引きの確率の計算には、一人目の籤引きの結果で場合分けしており、しかも、当然の事がながら、それぞれの条件付きの確率は、一人目の籤引きの結果によって、値が異る。

ただ、全体としては、最初の同じ結果になっているというだけである。

この結果は、「形の上」では、「実際には影響を受けているが、計算した結果、偶然 (?) 一致 している」ように思えない事もない。

しかし、もし、本当に、籤引きの原理が成立するのであれば、「二人目の確率が、一人目の籤引きの結果に無関係である」事が明確に解る計算 (解釈) 方法があるはずである。

その解釈とは何だろうか ? もう一度、改めて「籤引きの原理」を解釈してみよう。

繰り返すが、「籤引きの原理」は、「一人目と二人目は同じ結果」という事を意味する。そして、「一人目は先に引くが、二人目は後なのに」というのが、「違和感 (直観的な否定)」の要因だった。

つまり、「順序」を仮定するから「違和感」を持つというのであれば、「順序を無くせば、違和感が、解消される」という事になる。

次の証明は、この「順序を無くす」という発想から説明される。

3.3.2 引いた籤の並びの利用

■籤の並び　元の問題では、m 本の籤を k 人の人間が「順番に引く」事になっている。そこで、「k 人全ての人が籤を引き終った後の状況」を考えてみよう[*7] [*8] [*9] [*10]。

状況を判り易くするために、籤には $1, 2, .., m$ の番号が振られており、更に、話を簡単にするために $1, 2, .., n$ が当たり籤であり $n+1, n+2, .., m$ が外れ籤であると仮定[*11] しよう。

j 番目に引いた籤を F_j とすると、「k 人が籤を引き終った」結果は、k 対 $< F_1, F_2, .., F_k >$ で表現する事ができる。

これは、m 個の異る物から重複を許さずに k 個取出して並べた結果 (順列) となるので、

$$_mP_k = \frac{m!}{(m-k)!} = \frac{m \times (m-1) \times .. \times 2 \times 1}{(m-k) \times (m-k-1) \times .. \times 2 \times 1} = m \times (m-1) \times .. \times (m-k+1)$$

種類ある。

つまり、「一人一人が籤を引いた結果」を、時間にそって細かく考えるのではなく、全員が引き終えた後の、「全員の結果」だけに着目するという立場を取る。

この様な形で、「全体を眺めれ」ば、「細部に現れるの順序」に囚われずに済むようになるわけである。

■籤の並びに基く確率の計算　さて、ここで、1 人目が、当たりを引く確率 $P(1)$ を求めてみよう。

一人目が当たりとなるのは、$1 \leq F_1 \leq n$ の場合である。この様な k 対の個数は、最初の F_1 だけは、$1, .., n$ となる n 通りで、残りの部分の $k-1$ 個の $F_2, .., F_k$ は自由にしてよいので、$_{m-1}P_{k-1}$ 通りとなり、結局、その組み合わせの $n \times {}_{m-1}P_{k-1}$ 通りとなる。

したがって、$P(1)$ は、全体の場合の数 $({}_mP_k)$ に対する当たりの場合の数 $(n \times {}_{m-1}P_{k-1})$ の比なので、次の様に求める事ができる。

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{n \times {}_{m-1}P_{k-1}}{{}_mP_k} \\ &= \frac{n \times (m-1)(m-2)..(m-k+1)}{m(m-1)..(m-k+1)} \\ &= \frac{n}{m} \end{aligned}$$

[*7] 「意味上」、「k 本の籤を順番に引く」事と、「k 本の順序付きの『籤の束』を一度に引く」事は「同型」である。

[*8] 「同型」という意味は、「異る問題だが、同じ振舞をする」という事である (もちろん、数学的には、同型に対する、もっと、きちんとした説明がなされるが、ここでは、詳しく触れない)。したがって、「一方を解く事ができ」れば、「他方も同時に解け」た事になる。

[*9] 数学の世界では、このように、「与えられた問題を「同型」な問題に変換した別の問題を作り、その問題を解く事によって、元の問題解く」という手法が度々利用される。

「同等」ならば、「変換した問題を解くのも元の問題を解くのも同じではないか」という疑問があるかもしれないが、「変換した問題」が得られるという事は、「その問題の異る側面が明確になり、その問題に対して異る観点からのアプローチが可能になる」という事を意味する。

「同等」というのは、「論理的」な意味であり、「直観的」には「異る」物になるので、「直観が働いて」問題が解き易くなる

[*10] 元の問題と同型な問題を作る典型的な手法の一つに、「直積空間を作る」というアプロローチがある。

これは、複数の集合 $S_1, S_2, .., S_n$ から、それぞれ、解 $x_1, x_2, .., x_n$ を求める問題を、直積集合 $S^* = S_1 \times S_2 \times .. \times S_n$ を作り、その要素の一つ $< x_1, x_2, .., x_n > \in S^*$ を求める問題に対応付けるという手法であり、今回の例でも、この手法が利用されている。

[*11] もちろん、こう仮定しても問題の結果には影響しない。

一方、j 番目 $(2 \leq j \leq k)$ の確率 $P(j)$ も、k 対の j 番目、すなわち F_j のみ $1 \leq F_j \leq n$ を満し、他の部分は任意でよいので、$P(1)$ と全く同じ様にして計算して、$P(j) = \dfrac{n}{m} = P(1)$ を得る事ができる。

この j は任意なので、$P(1) = P(2) = .. = P(k) = \dfrac{n}{m}$ すなわち、「籤引きの原理」が成立する。

特に重要なのは、この方法では、「$P(j)$ の結果を得る」ために、「一人目の籤引きの結果 F_1 を利用していない」事である。

これは別の言い方をすれば、「一人目の籤引きの結果 F_1 は、他の籤引きの確率 $P(j)$ に影響しない」すなわち、「因果関係の否定」を意味している。

「一人目を引いた後の状況で、二人目を考える」というのは、言わば、「一人目の結果 F_1」という過去と、「二人目の予想 $P(j)$」という未来を並べて<u>区別している事</u>を意味する。

この「時間上の順序関係」が、「因果関係」を「<u>誤</u>誘導」しているわけである。

しかし、「k 人が籤を引き終った」状況では、「一人目の結果 (F_1) も j 人目の結果 (F_j) も同じ過去の結果」として<u>同列に扱う事を</u>を意味し、そこには、「因果関係」の生じ様がない。

また、この形であれば、$P(1)$ と $P(j)$ は単なる、場所 (F_1 に注目するのか F_j に注目するか) の違いでしかないので、当然、「同等である」事は「<u>直観的に</u> 明らか」である。

参考文献

[1] 本間, “くじ引きの原理”, `http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/probability/probability4.html`