Rolle(ロール) の定理と、平均値の定理

栗野俊一*

2014 年 11 月 8 日

目次

1 ロールの定理

次のロールの定理 (定理 1.1) は、後に示す平均値の定理 (節 3:定理 3.1) の特別な場合 ($f(a) = f(b)$ の場合) になっている。しかし、この平均値の定理を証明するには、この ロールの定理を先に示し、平均値の定理に現れる関数変形して、この ロールの定理の形に帰着させて証明する方法[*1] を取る。

そこで、まず、平均値の定理の証明の前に、次のロールの定理を示す。

* 日本大学理工学部数学科<kurino@math.cst.nihon-u.ac.jp>

*1 一般の定理を証明するのに、まず、「その特殊な場合を示し」、それから、「その特殊な場合を利用して、一般の場合を、その特殊な場合に帰着させて示す」というのは、数学でもよく利用されるテクニックである。

この手法の利点は、1. 特殊な場合を想定する事によって、本質的な部分が明確になり、見通しがよくなる (特殊な場合なので、その特殊性をもたらす性質 (今回の ロールの定理の場合は、$M = 0 (= f'(c))$ になるという点が特殊で、それが本質的に証明の中で利用されている) が利用できる) 事、2. 変形 (同値類) を利用する事によって、「代表的な元で証明ができれば、一般的にもいえる」という性質を利用する事にある。

定理 1.1 (ロールの定理) 右の図 *(*図 *1)* の様に、閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が、開区間 (a,b) で微分可能で、$f(a)=f(b)$ を満す時、$f'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ が存在する。

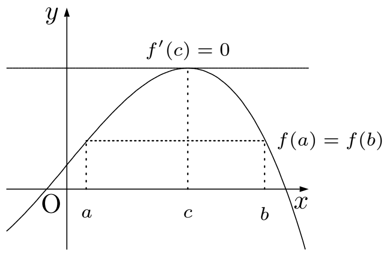

図 1　ロールの定理

2　ロールの定理の証明

2.1　中間値の定理

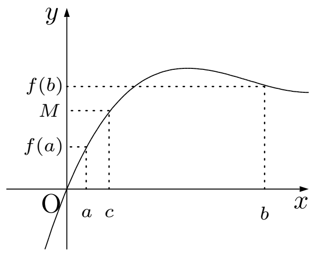

図 2　中間値の定理

ロールの定理の証明を高校の範囲[*2] で示すには、次の、中間値の定理 (定理 2.1) を利用する。

定理 2.1 (中間値の定理) 右の図 *(*図 *2)* の様に、閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が、開区間 (a,b) で連続で、$f(a)<f(b)$ を満す時[*3] 、$f(a)<M<f(b)$ である任意の実数 M に対して、$f(c)=M$ となる $c\in(a,b)$ が存在する。

この定理の証明については、後に述べる (節 4) として、ここでは、この定理を利用して、ロールの定理を証明する。

2.2　中間値の定理を利用した ロールの定理の証明

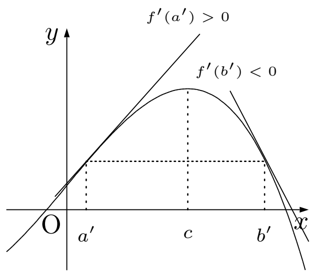

図 3　ロールの定理の証明

まず、仮定より、関数 $f(x)$ が、区間 (a,b) で、微分可能なので、導関数 $f'(x)$ は、区間 (a,b) で、連続である事に注意しよう。

さて、今、ここで $f'(x)$ の挙動によって、次の三つの場合に分けて考える。

(区間 (a,b) 内で、恒常的に 0 である) この場合は、$c\in(a,b)$ となる任意の点 c で、$f'(c)=0$ が成り立つ。

(区間 (a,b) 内の点 $a'\in(a,b)$ で、初めて 0 でない値を取り、それが正である) [*4] 右上の図 (図 3) のように、点 $x=a'$ で、$f'(a')>0$ となるような状況を考える。この場合、関数 $f(x)$ は、点 $x=a'$ で、微分係数 $f'(a')$ が正なので、$x=a'$ の近くで増加し、$x=a'$ の直後で、$f(a)$ より大きな値 $M(>f(a))$ を取る。

[*2] 高校の数学には、「利用して良い内容」という縛りがあり、その範囲で議論する必要がある。これは、数学を習う上で、厳しい縛りではあるが、その一方、よく吟味された内容が、予め (証明なしに、直観的な説明のみで、天下り的に..) 与えられており、「高校の範囲の問題」であれば、それだけで、閉じた議論ができるように注意深く作られている。

[*3] 一般の中間値の定理では、$f(a)\geq f(b)$ の場合も考えるが、一般性を失わずに、$f(a)<M<f(b)$ と考えて良い。
何故なら、$f(a)=M$ の時には、$c=a$、$f(b)=M$ の時には、$c=b$ とすれば、$f(c)=M$ を満すので明らか。
また、$f(a)=f(b)$ の時には、$M=f(a)$ の場合しかないので、上記の状態に還元。
最後に、$f(a)>f(b)$ の場合は、$g(x)=-f(x)$ とすれば、この例に還元できる。

[*4] 「初めて 0 でない」という表現は、ようするに、「途中までは、0 だったのに、ある点から、0 でなくなるような関数」というものを想定しているからである (その意味で、高校の数学では考える必要がないかもしれない...)。
しかし、「途中から突然性質が変るような関数が、連続だったり、微分可能だったりするだろうか ?」という疑問もありえよう。
ところが、次のような関数は、このような性質 (原点 0 までは、0 だが、その後は正になる関数で、原点の所で性質が変化して

一方、$M > f(a) = f(b)$ なので、関数 $f(x)$ は、区間 (a', b) で減少することになる。これは、この区間の何処かの $b' \in (a', b)$ で、$f'(b')$ は負になる[*5] 事を意味する。すなわち、導関数 $f'(x)$ は、区間 (a', b') において、$f'(a') > 0 > f'(b')$ となる。従って、中間値の定理 (定理 2.1) より、ある $c \in (a', b')$(即ち $c \in (a, b)$) が存在し、$f'(c) = 0$ が成り立つ。

(区間 (a, b) 内の点 $a' \in (a, b)$ で、初めて 0 でない値を取り、それが負である)

$g(x) = -f(x)$ とすれば、$f'(a') < 0$ なので、$g(a') = -f(a') > 0$ となり、上記の場合に還元される。従って、ある $c \in (a, b)$ が、存在し $g'(c) = 0$ となる。ところが、$f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$ となるので、$f'(c) = 0$ が成り立つ。

何れの場合も、$f'(c) = 0$ が成り立つので、常に、$f'(c) = 0$ が成り立つ。

3　平均値の定理の証明

3.1　平均値の定理

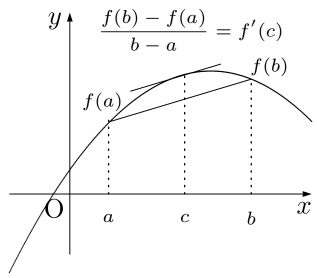

図 4　平均値の定理

平均値の定理 (定理 3.1) は、次のようなものである。

定理 3.1 (平均値の定理)　関数 $f(x)$ が区間 (a, b) で、微分可能な場合、ある $c \in (a, b)$ が存在し、次の式が成立する。

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ここで、$f(a) = f(b)$ とすると、ロールの定理 (定理 1.1) と同じ状況なので、ロールの定理は、平均値の定理の特別な場合と考える事ができる。しかし、次に述べるように、平均値の定理は、ロールの定理を用いて証明する事ができる。

3.2　ロールの定理を用いた平均値の定理の証明

与えられた $f(x)$ は、二点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る。そこで、この二点を通る次の直線 ℓ を考える。

$$\ell : y = h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

もちろん、このように関数 $h(x)$ を置いたので、$h(a) = f(a)$, $h(b) = f(b)$ となる[*6] 。

いるが、連続だし、微分可能である [確認してみよう..]) を持つ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ は、定義から解るように、二つの関数 (上の例では $f_1(x) = 0$ と $f_2(x) = x^2$) を、原点 $(x = 0)$ の所で、継ぎ接ぎ した形で定義されている。このために、原点の前と後では異る振舞をするわけである。

ただし、連続性や微分可能性を失わないように上手に 継いであるので、微分可能になっているわけである。

[*5] これは、背理法を利用し、「もし、区間 (a', b) で、常に $f'(x) \geq 0$ だと仮定すると、関数 $f(x)$ は、区間 (a', b) で常に広義単調増加関数なので、$f(b) \geq M$ が成立する。これから、$f(b) \geq M > f(a) = f(b)$ すなわち $f(b) > f(b)$ が導かれたので矛盾」という形で示す事ができる。

[*6] 実際に、$h(a), h(b)$ を計算すれば良い。

そして、この関数 $h(x)$ を利用して、関数 $g(x)$ を $g(x) = f(x) - h(x)$ と置く。

すると、$g(x)$ は、区間 (a, b) で、微分可能[*7] であり、導関数 $g'(x)$ は、

$$g'(x) = (f(x) - h(x))' = f'(x) - h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となり、更に、$g(a) = f(a) - h(a) = 0 = f(b) - h(b) = g(b)$ となる。

従って、ロールの定理 (定理 1.1) より、ある $c \in (a, b)$ が存在し、$g'(c) = 0$ となる。

これから、$f'(c) = g'(c) + h'(c) = 0 + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ となる。

すなわち、導関数 $f'(x)$ は、点 $x = c \in (a, b)$ で、値 $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ を取る。

4　中間値の定理の証明

4.1　連続関数

中間値の定理は、連続関数の基本定理である。これを証明するのに、次の連続の定義 (定義 4.2) を利用する事を考える。

定義 4.1 (各点連続の定義) 点 $x = a$ の回りで、定義されている関数 $f(x)$ が、点 $x = a$ で連続であるとは、次の式が成立する事である。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

定義 4.2 (連続の定義) 閉区間 $[a, b]$ で定義された、関数 $f(x)$ が、$c \in (a, b)$ となる、任意の点 $x = c$ で、各点連続であれば、この関数 $f(x)$ は、区間 (a, b) で連続であると言う。

4.2　連続関数の性質と極限

連続の定義 (定義 4.2) は、極限を利用して、定義されている。ところが、高校の数学では、極限の扱いが厳密ではなく、この結果として、この中間値の定理の証明も極限の定義を利用して厳密に証明する事ができない。

連続の定義 (定義 4.2) は、$\lim\limits_{x \to a} x = a$ である事を利用すると、次のように、読み替える事ができる。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \to a} x\right)$$

すなわち、関数適用と極限操作が交換可能である事を意味する。

従って、「関数の連続性」とは、「その関数が関数適用と極限操作が交換が可能という性質持つ事」だ、として扱う事にする。

[*7] ここで、「(y 軸に平行でない..) 直線」を表す関数は、区間 $(-\infty, +\infty)$ で微分可能な関数である事、微分可能な関数の和も微分可能な関数である事を利用している。

4.3　数列の極限の性質

実数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ において、「n を大きくすると、a_n が限り無く α に近付く」時、実数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ は、極限値 α に収束すると言い、これを、次の式で表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

この「n を大きくすると、a_n が限り無く α に近付く」という事の 意味 は考えない事にし、この収束に関する幾つかの性質が、天下り的に「成り立つ物」として受け入れる[*8] 事にする。

性質 4.3 (和と積に関する交換法則) 数列の極限に関する、次の性質は、無条件に利用する。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (c\ a_n) = c\ \alpha$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

ここで、前段の「数列が収束する」という仮定は本質的である。もし、数列が収束しないのであれば、この式は必ずしも成立しない[*9] 。

これらは、それぞれ、数列の極限操作が、次のように、加算操作や定数の積操作と、交換可能[*10] である事を示している。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (c\ a_n) = c\ \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

定義 4.4 (広義単調減少数列) 数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ が、次の性質を満す場合、数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ は、広義単調減少数列であると言う。

$$a_n \geq a_{n+1}$$

定義 4.5 (下界を持つ数列) 数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ に対して、ある実数 $M(>-\infty)$ が存在し、$a_n \geq M\,(n=1,..)$ だとする。この時、この数列は**下界** M を持つと言う。

この 広義単調減少数列に対して、次の下界を持つ広義単調減少数列の性質 (性質 4.6) を受け入れる事にする。

[*8] もちろん、「極限」を (大学で学ぶように「$\epsilon-\delta$ 論法」を利用して) 厳密に定義すれば、それを利用する事によって、以下の性質も、この定義から全て導く事ができる。

[*9] 例えば、$+\infty$ に発散する数列 $\{a_n=n\}$ と $c=0$ の場合を考えると、結果の等式の左辺は $\lim_{n\to\infty}(c\ a_n) = \lim_{n\to\infty}(0\times n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ であるが、右辺は、$c\ \lim_{n\to\infty} n = 0\times\infty$ となり、0 と無限大の積という意味のない式になってしまう。

[*10] 先の例 (発散する数列) で示したように、この交換法則は自明 (明かに成り立つ物) ではない。むしろ、このような交換法則が成立する事は稀であり、これが成立するという事は大変 良い性質を持つ と考えてよい。数学の中には沢山の交換法則が現れるが、それらは大変特殊なので、敢えて取り上げる価値がある (し、実際に様々な所で役に立つ) から、沢山現れるのであり、ありふれた性質だから沢山現れるわけではない。

性質 4.6 (下界を持つ広義単調減少数列の性質) 広義単調減少数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ が下界 M を持てば、収束する。

すなわち、ある $\alpha \geq M$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \geq M$$

である[*11]。

この性質 4.6 で、特に $M=0$ と置いた特殊な場合は、興味深い。すなわち、

定理 4.7 (正値性) 広義単調減少数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ が下界 0 を持てば、収束する。

すなわち、ある $\alpha \geq 0$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \geq 0$$

である。

これは、例によって、広義単調減少数列の場合のみであるが、不等式との交換ができる[*12] 事を意味する。

$$a_n > 0\,(n=1,...) \Rightarrow \left[\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \geq 0\right]$$

ここで、左側には等式はついていないのが、右には等式がついている事に注意しよう。また、$a_n \geq 0\,(n=1,...) \Rightarrow a_n > 0\,(n=1,...)$ なので、もちろん、$a_n \geq 0\,(n=1,...) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \geq 0$ となり、等号付きの不等号は、極限操作と交換できる[*13] 事が解る。

実は、次のように、一般に収束する数列に関しての不等式との交換がいえるのでこれも受け入れる事にしよう。

性質 4.8 (不等式との交換) 数列 $\{a_n\}$ が、常に非負で収束値 α を持つならば、α は非負である。

すなわち、

$$\left[a_n > 0\,(n=1,...)\text{ かつ }\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\right] \Rightarrow \alpha \geq 0$$

が成り立つ。

広義単調増加数列や、上界も同様に定義され、以下の定理が言える。

定理 4.9 (上界を持つ広義単調増加数列の性質) 広義単調増加数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ が上界 M を持てば、収束する。

---

*11 これが成立する事を「直観的」に説明するならば、もし、広義単調減少数列 $\{a_n\}\,(n=1,...)$ 収束しないとすると、a_n は n の増加に伴い、どんどん小くなるので何時かは下界の M を下回ってしまうので、M が下界である事に矛盾するという事である。

しかし、「何時かは」というのが、本当に「何 (の n の) 時なの」という質問に対して、明確に示す事ができないので、「直観」から離れる事ができない。

*12 素朴な意味で、交換と呼ぶのであれば、$\lim_{n\to\infty}(a_n \geq 0) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \geq 0$ と表現すべきだが、$\lim_{n\to\infty}(a_n \geq 0)$ という表現は (意味がないわけではないが、高校では扱わない数学で用いられる表現であり..)、普通は使わない (その代りに $a_n \geq 0\,(n=1,...)$ を使う) ので、交換のようにはみえないかもしれないが、意味的には、「交換」しているというふうに考えて欲い。

*13 もちろん、交換といっても逆の事はいえない。

$b_n = -a_n$ として、数列 $\{b_n\}\,(n = 1, ...)$ を作ると、これは、広義単調減少数列であり、$-M$ という下界が存在するので、下界を持つ広義単調減少数列の性質 *(性質 4.6)* より、ある α が存在し、数列 $\{b_n\}\,(n = 1, ...)$ は、α に収束する。したがって、元の広義単調増加数列 $\{a_n\}\,(n = 1, ...)$ は、$-\alpha$ に収束する。

この二つの命題から、次の定理 (単調な二つの数列の定理) が導ける。

定理 4.10 (単調な二つの数列の定理) 二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して、次の関係が成立するとする。

$$a_1 \leq a_2 \leq .. \leq a_i \leq .. \leq b_i \leq .. \leq b_2 \leq b_1$$

この時、この二つの数列は、それぞれ、α, β に収束して、次の性質を満す。

$$a_i \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \leq \beta = \lim_{n\to\infty} b_n \leq b_i$$

まず、数列 $\{a_n\}$ を考えると、これは b_1 という上界を持つ広義単調増加数列である。従って、上界を持つ広義単調増加数列の性質 *(定理 4.9)* より、ある α が存在し、それに収束する。同様に、 $\{b_n\}$ が、収束する事も、下界を持つ広義単調減少数列の性質 *(性質 4.6)* から示す事ができる。

残るは、$\alpha \leq \beta$ という関係が成立するか *?* という問題である。そこで、この不等式が成り立つ事を、次に示す。

まず、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n - a_n$ と置く事にしよう。すると、仮定より、$\{c_n\}$ は広義単調減少数列で、かつ 0 を下界として持つ。したがって、$\gamma \geq 0$ となる値に収束する *(定理 4.7)*。

これから、

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma \geq 0$$

となるので、$\beta - \alpha \geq 0$ すなわち、$\beta \geq \alpha$ となる。

これらを利用すると、次の有用な定理 (区間縮小の定理) が証明できる。

定理 4.11 (区間縮小の定理) 単調な二つの数列の定理 *(定理 4.10)* の仮定に加え、更に、$\gamma = 0$ と仮定する。

この時、

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

である。

これは、$\gamma = 0$ なので、$\beta - \alpha = \gamma = 0$ となり、$\beta = \alpha$ が成立するからである。

4.4 区間縮小の定理による 中間値の定理の証明

中間値の定理の仮定、すなわち、閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) で連続で、$f(a) < f(b)$ を満す時、$M \in (a, b)$ となる任意の M に対して、三つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を、次のような漸化式を用

いて、それぞれ定義する。

$$a_{n+1} = \begin{cases} a & (n = 0 \text{ の時}) \\ c_n & (f(c_n) < M \text{ の時}) \\ a_n & (\text{その他の時}) \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} b & (n = 0 \text{ の時}) \\ c_n & (M \leq f(c_n) \text{ の時}) \\ b_n & (\text{その他の時}) \end{cases}$$

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

これらの数列に対して、次の性質が成り立つ[*14] 。

$$a_n \leq a_{n+1} \leq c_n \leq b_{n+1} \leq b_n$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

$$f(a_n) < M \leq f(b_n)$$

この事から、次の事が導かれる。

定理 4.12 ある $c \in (a,b)$ が存在し、$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n (= \lim_{n\to\infty} c_n)$ かつ、この c に対して、$f(c) = M$ である。

なぜなら、$\{a_n\}$ は広義単調増加数列、$\{b_n\}$ は広義単調減少数列で、区間縮小の定理 *(定理 4.11)* の条件を満す。よって、ある $c \in (a,b)$ が存在し、$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$ となる。

更に、関数 $f(x)$ の連続性から、$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(c) = f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ である。すなわち、数列 $\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\}$ は収束し、共に収束値は $f(c)$ である。

これと、$f(a_n) \leq M$ から、性質 *4.8* より、$f(c) = \left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) \leq M$ となり、$f(c) \leq M$ がいえる。

同様にして、$M \leq f(b_n)$ を利用して、$M \leq f(c)$ も成り立つので、この二つから $f(c) \leq M \leq f(c)$ すなわち、$f(c) = M$ が成り立つ。

この結果が、求める中間値の定理 (定理 2.1) である。

参考文献

[1] wikipedia, “ロルの定理”,
`http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AD%E3%83%AB%E3%81%AE%E5%AE%9A%E7%90%86`

[2] wikipedia, “平均値の定理”, `http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B3%E5%9D%87%E5%80%A4%E3%81%AE%E5%AE%9A%`

[3] ipe@jp, “定理：平均値定理 mean value theorem, law of the mean”,
`http://www.ne.jp/asahi/search-center/internationalrelation/mathWeb/Differentiation/Differential1VarFnctn/TheoremRolleMeanValue.htm`

[*14] 事は、n に関する、数学的帰納法によって、証明する事ができる。