教育数学

-- ベクトル --

数学科 栗野 俊一 (TA: 善養寺 [院生 1 年])

伝言

私語は慎むように !!

- □ 色々なお知らせについて
  - ○ 栗野の Web Page に注意する事

    http://edu-gw2.math.cst.nihon-u.ac.jp/~kurino
- □ 座席について
  - ○ 席順は自由ですが、試験と同じように、前に詰めて座ってください
    - ▹ 講議開始時に前に詰るように席替えを指示する可能性があります
    - ▹ 席替えの時間は無駄なので、席替えをせずにすむようにしてください
- □ 講義開始前に済ませておく事
  - ○ 今日の資料に目を通しておく事
- □ 講義前の注意
  - ○ 講義前は、栗野は準備で忙しいので TA を捕まえてください

お知らせ

- 配付物
  - ベクトル
    - 課題問題プリント
    - 課題の提出用紙 : 2 枚 (各々 1 枚にニ問迄)
  - 小テスト問題 : 前回まで合格していない人
- 本日の目標
  - 演習
    - 課題の提出

前々回(2015/10/22)の小テストの合格者

3014 3027 3051 2058 3090 3080 3053 3093
3121 3085 3123 3094 5802 3124 3049 3063
3091 3073 3022 3065 3021 3019

本日の課題 (2015/10/29)

- 本日の課題 (2015/10/22)
  - 「図形 I」、「図形 II-a/II-b」から、各自問題を 4 問選んで解答し、提出する
    - 学籍番号が偶数の人は奇数の問題
    - 学籍番号が奇数の人は偶数の問題
- 本日の課題 (2015/10/29)
  - 「図形 II-a/II-b」と「ベクトル」から、各自問題を 4 問選んで解答し、提出する
    - 学籍番号が偶数の人は偶数の問題
    - 学籍番号が奇数の人は奇数の問題
- 今週の提出物
  - 小テスト不合格者のみ、答案を提出
  - 先週迄の課題を提出していない人は、先週までの課題を提出

小テスト (2015/10/22) の評価基準

- 配点/評価基準
  - 共通
    - 明らかな「誤り」がある場合 : 部分点 (～ +5) をつける
    - 誤りがない場合でも省略や不充分な点がある場合は、個々に減点する
    - 減点 (日本語ができてない) → 一律 5 点減点
  - 1.a 背理法 → 30 満点
    - a が素数でないのに a|n^2 -> a|n としている
      - a に平方数を含む(誤り) : -20
      - a に平方数を含まない : -10
    - 平方が外に出せていない → -5 (証明に影響する場合)
    - 有理数×無理数=無理数
      - 言及がない : -5
      - 言及があるが根拠を示していない : -2
  - 1.b 直接法 → 30 満点
    - 高校で学んでいない内容や概念、定理を利用している
      - 内容も書いていない/誤っている : -20
      - 内容は正しいが、証明がないか誤っている : -15
  - 2. 因数定理 → 40 満点
    - 新しい記号を導入しているのに、その定義がない/誤っている : -5

小テスト (2015/10/22) 総評 (1)

- 「日本語」の問題 : いい加減な「言葉使い」はダメ
  - 用語が間違っている / 言葉を適切に利用していない / 「未定義な言葉」と使う
    - 「日本語」として「誤っている」ものは、採点対象(問題)外 (数学以前の問題)
      - 「目的語を伴わない他動詞」は無意味 (矛盾する : 何と何が ?)
    - 「数学」は、「『表現』に最も厳しい」→ 専門用語/数式を利用する理由
    - 証明においては、「論理展開」も重要 (「接続詞」が不明なものはダメ)
      - 「かつ」、「または」、「ならば」、「一方」、「しかしながら」を補う
    - 「日本語」では、「言葉の末尾」も大変重要
      - 「である/でない」では大違い、「となる/とする/とできる」も全然違う
      - 「仮定する/導ける」
    - 「未定義」を利用した瞬間に Out (勝手な「定理」を取り出すも NG)
      - 新しい記号を導入する場合は「定義」する必要がある

数学で利用される「表現」の意味

- □ 証明者の意図的か、論理的に自動的に成立するか
  - ○「～とする/～と置く」と「～とできる/～と置ける」、「～となる/～である」
    - ▹ ～とする : ～と定義する / 意図的に「～にする」
    - ▹ ～とできる : ～になる場合とならない場合があるが、「～にできるのでする」
    - ▹ ～となる : 一意に、必ず「～になる」(自動的)

小テスト (2015/10/22) 総評 (2)

- 「誤魔化し」のテクニック
  - 「成立するかどうかわからない場合」
    - 「成立する/なる」と(根拠もなしに)主張する → 「解っている」振りをする
      - cf. 「明らか」と書く
    - 「○○の定理により」と書く → 定理の内容や証明がない
      - 挙句の果てに、「誤った使い方」をしている(生兵法は怪我のもと)
  - 解らないから書かない → 「良い方に取って貰える事」を期待する
    - 片言の英会話 (I, want, buy, it, cheep, how much ?) のような答案
- 「立場の違い」を踏まえる (「教員」として、「誤魔化し」から教えるのか !!)
  - 「自分」が「受験生」: どんな卑怯な手を使っても合格したい
    - → なら、どうぞ御勝手に / しっぺ返しがあっても自己責任で(自分の人生だ)
  - 「自分」は「教員」であり、「相手が生徒」
    - → まずは「生徒」に「正しい方法」を「身に付けてもらう」必要がある
  - 「普段から誤魔化している」人間は、「何時でも誤魔化す」人間になる
    - 「生徒」に「誤魔化しを教える奴」には(少なくても僕は)子供を預けたくない

小テスト (2015/10/22) 総評 (2)

- 答案の書き方
  - 「答えが『何』か」が「一目で理解る」ようにする
    - cf. 「答 : ○○」と大きく、下線を引いた上で、答案の最後の行に書く
- 証明のギャップ(gap:論理の飛躍)を無くすには
  - 基本の形は三段論法
    - P(c) である
    - P(x) -> Q(x) である
  - だから
    - Q(c) である
  - つまり、前の所ででたもの P(c) を使って、次の行 Q(c) をしめす
  - 一般の形は、次のように一つ前のものを利用して、次の行を示す
    - P_1 (仮定)
    - P_1 -> P_2 (P_1 かつ P_1 -> P_2 なので P_2)
    - P_2 -> P_3 (一つ前の P_2 をつかっている)
      - ..
    - P_n (結論)
  - 前の行と関係ない記述がでてきたら、「論理の飛躍がある」とみなす

小テスト (2015/10/22) での悪例

- 小テスト (2015/10/22) に現れた、ダメな例
  - 用語の使い方が間違っている例
    - 誤 : \sqrt{3267}を「素因数分解」すると 33\sqrt{3} なる
      - 「素因数分解」の対象は、「整数」: \sqrt{3267}は「素因数分解」できない
    - 正 : 3267 を素因数分解すると 3^3*11^2 になる
    - 正 : \sqrt{3267}の根号の中の平方部分を外に出すと33\sqrt{3} なる
  - 「命題」と「値(式)」の区別ができていない
    - 誤 : 「21\sqrt{5}を P」、「無理数をQ」とし、「P → Qを証明する」
    - 正 : 「x = 21\sqrt{5}を P」、「x が無理数をQ」とする
  - 「数」と「多項式」の区別ができてない
    - 誤 : f(x) を A で割った商を Q、余りを R とする
    - 正 : f(x) を A(x) で割った商を Q(x) 余りを R(x) とする

直接法で利用された方法 (1)

- 「平方数」の利用
  - 平方数の定義 : n が平方数 <-> 有る整数 m が存在し、n = m^2 となる
  - 「平方数」の性質 : 「n が自然数の時、(\sqrt{n} \in Q → n は平方数)」
  - 証明の概要
    - 上の対偶を取り、自然数 n が平方数でないので\sqrt{n}は有理数でない
  - 採点の例
    - 「n が自然数」という条件がない : これは成立しない : 0 点
    - 「平方数」の定義がない : 定義なしに「n が平方数でない」と主張 : +5 のみ
    - その他、「誤り」がある : 基本 +5 のみ
- 「素因数分解」の利用
  - 素因数分解の定義 : n を、昇順に並んだ素数 p_1, .., p_k と指数(>1) b_1,..,b_k を用いて n=(p_1)^{b_1}*(p_2)^{b_2}*..*(p_k)^{b_k} の形に分解する事
    - 「素因数分解」の性質 : 素因数分解には一意性がある
  - 証明の概要
    - 3n^2 の素因数分解と m^2 の素因数分解が異る事を示す
    - n^2, m^2 を素因数分解すると指数が全て偶数になるので 3n^2 では 3 の指数が奇数になる事を利用
  - 採点の例
    - 「n^2 の素因数分解の指数が偶数になる」事を示していない

直接法で利用された方法 (2)

- 「整数係数の(二次元)方程式の有理数解」の性質
  - 次の「整数係数($a_n != 0$)」の方程式の解が有理数 $q=m/n$ ($m,n \in Z$) の時

$$a_nx^2 + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_0 = 0 \ (a_i \in Z)$$

    - 「n は a_n の約数で、m は a_0 の約数になる」という性質
  - 証明の概要
    - $\sqrt{c}, c \in Z$ は、方程式 $x^2-c=0$ の解
    - これの係数は 1, 0, c なので、整数係数の方程式になっている
    - ところが、この方程式の有理数解があるとすれば、c の約数に+/-を付けたもの(有限個)になる
    - ところが、それらを具体的に求めて、この方程式に代入しても解にならない事がわかる
    - すなわち、有理数で、$x^2-c=0$ の解になるものはないので、
    - $x^2-c=0$ の解である $\sqrt{c}$ に等しくなる有理数は存在しない
    - よって、$\sqrt{c}$ は有理数でない。
  - 採点の例
    - 「方程式の係数が『整数』」という「条件」が明記されていない

直接法で利用された方法 (3)

- □ 無理数は非循環小数になる
  - ○ 証明の概要
    - ▹ \sqrt{c} は非循環小数になるので無理数
  - ○ 採点の例
    - ▹ \sqrt{c} が非循環小数になる事(無限の長さの数に関する言及)が示されていない
    - ▹ ※「x が非循環小数になる」事を示すのは大変(普通は「x が無理数」という事を利用する)
- □「代数的整数」の性質
  - ○「代数的整数」定義 :「a_n=1 である整数係数の(二次元)方程式の解」の事
  - ○ 証明の概要
    - ▹「整数係数の(二次元)方程式の有理数解」の性質と a_n=1 から「『代数的整数』が有理数ならば整数」になる
    - ▹ \sqrt{c} は x^2-c=0 で、a_n=1 である整数係数の(二次元)方程式の解だから「代数的整数」になる
    - ▹ 一方、\sqrt{c}は整数でない。だから、有理数でもない。
  - ○ 採点の例
    - ▹「代数的整数」の定義がない
    - ▹ \sqrt{c}が整数でない事が示されていない

直接法で利用された方法 (4)

- 約数の個数を比較する
  - 性質 m=n ならば、m の約数の個数と n の約数の個数が同じ
    - 本質的には、素因数分解の一意性から導かれる
  - 証明の概要
    - \sqrt{c} が有理数でない事をいうために m^2 と cn^2 の約数の個数を比較する
    - 異っていれば、m^2 \ne cn^2 がいえるので \sqrt{c} \ne m/n がいえる
  - 採点の例
    - 「約数の個数が違う」事が示されていない

採点後感 (前口上、あるいは言い訳)

- 採点は辛い(と教員は口が割けても言うべきでないが..正直辛い)
  - 「成績が悪い」ととっても辛い(正直、情無くなる)
    - 「ぜーんぶ花丸/みんな100点」なら楽しく採点できるのに..
    - 「教員になる積もりがある」なら、「教員の立場も考えて」欲い
    - ※ ようするに「きちんと勉強しろ」って事だ
- 集団は個人の集まり
  - 個人の責任は集団の責任ではない
    - 集団内の一部の人間が出来がわるくて、集団として出来が悪いわけではない
  - 集団の責任は個人の責任ではない
    - 集団として悪くても、集団内には、悪くない個人が含まれる
  - 「8:2 の法則」
    - 集団のリソースの 8 割を、その集団の 2 割のメンバーが占有している現象
    - 例1 : 世界の 8 割の富は、世界の 2 割の人々(大金持)が所有している
    - 例2 : 栗野の注意の 8 割は、受講者の 2 割の人に向けられている
  - 結局、集団の一部(2割)の人のために大勢(8割)が、「割を食って」いるって事
    - ※ 一部(2割)の人の答案が変なのに、長々(講議の8割)とその事に触れるのも許して
    - まあ、「反面教師」という言葉もあるし、「(自分だけでなく、他人の)失敗からも学べ」る

採点後感 (何がなんでも八つ当り)

- 「日本語」
  - 言葉が足りない人
    - 「省略すれば、良く取ってくれる」と「甘える」のは止めて欲しい
    - 「言葉が足りない」は、「答えとしての情報量が少ない」事を意味する
  - 特に「計算」で
    - 「最後の『答』が合っていればいいんでしょ」は、間違い(少なくても教育上は)
  - 特に「証明」で
    - 根拠もなしに「あきらか」とか「成り立つ」と書くのは「誤魔化し」
    - 「大事な所が省略」されていれば、「実質 0 点」
    - 「部分点を期待する」のは止めて欲しい(でも、与えるけど..)
  - 「証明」で、間違いな主張を追加する人
    - 「不安」だから、「何かを書けば良い」は、「逆効果」
    - ※採点者も人間なんだから、足りなければ「減点」で済むが「明らかな誤り」は、×にするしかない
    - 「嘘を書く」のは止めて(恥しい) (「示せない」なら、そう白状しよう..)
- コピーするなら「正確」に
  - 栗野は情報屋だから、「コピペ」は、「技術」だと思っている
    - しかし、それだけに「不『正確』なコピー」には厳しい
    - 「正確なコピー」をするには、「誤り訂正」が必要になる
    - 「誤り訂正」をするには、「理解」が必要
    - ※ 結局、「理解」していないものを使うな(生兵法は怪我のもと)