微分積分学 A 期末試験問題[*1]

2016 年 7 月 28 日 第 2 時限施行　　　担当 水野 将司[*2]

問題 1.

次の問いに答えよ。ただし、答えのみ書くこと。

(1). $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ を $x \in \mathcal{R}$ に対して、$f(x) := x^2$ で定義するとき、像 $f([-2, 1])$ を答えよ。

(2). $\arccos(\cos(-\pi))$ を求めよ。

(3). $\arctan(\tan(\pi))$ を求めよ。

(4). $a > 1$ に対して、極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ を求めよ。

(5). 極限 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} e^x \cos(3x)$ を求めよ。

(6). 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x}$ を求めよ (ヒント : $y = \arcsin x$ とおく) 。

(7). 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4x+3} - x)$ を求めよ。

(8). 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{x^\alpha}$ が、0 でない値に収束するような実数 $\alpha \in \mathcal{R}$ を求めよ。

(9). 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathcal{R}$ に収束すること、すなわち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の $\epsilon - N$ 論法による主張を答えよ。

(10). 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathcal{R}$ に収束しないこと、すなわち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ の $\epsilon - N$ 論法による主張を答えよ。

(11). $f : (-1, \infty) \setminus \{1\} \to \mathcal{R}$ とする。

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ であることの $\epsilon - \delta$ 論法を用いた定義を答えよ。

(b) $A \in \mathcal{R}$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ である事の $\epsilon - \delta$ 論法を用いた定義を答えよ。

(c) $A \in \mathcal{R}$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x) = A$ である事の $\epsilon - \delta$ 論法を用いた定義を答えよ。

(12). $I \subset \mathcal{R}$, $f : I \to \mathcal{R}$ とする。

(a) $x_0 \in I$ に対して、f が $x = x_0$ で連続であることの $\epsilon - \delta$ 論法を用いた定義を答えよ。

(b) f が I 上一様連続であることの定義を答えよ。

(c) f が I 上連続となるが、I 上一様連続とならないような I と f の例を与えよ。

(13). 開区間 $(0, 1)$ 上の連続な関数 $f : (0, 1) \to \mathcal{R}$ で、$(0, 1)$ 上連続かつ有界であり、最大値は存在するが、最小値が存在しない例をあげよ。

(14). 整数 a に対して、方程式 $x^3 + 15x^2 + 68x + 81 = 0$ の実数解が $a \le x \le a + 1$ を満す時、整数 a を求めよ。

(15). $f : [-1, 1] \to \mathcal{R}$ を連続な関数とする。中間値の定理を述べよ。

(16). Weiestrass の定理で、最小値に関数主張を inf を用いて述べよ。

[*2] この資料は、水野先生の資料を再入力したので、一部表現や、内容が変っている (間違っている!!) 可能性があります。もし、間違いに気が付いた方は、是非、お知らせください。

問題 2.

関数 $f:(-1,1)\setminus\{0\}\to\mathcal{R}$, $g:(-1,1)\setminus\{0\}\to\mathcal{R}$ は、$x\to 0-0$ のときにそれぞれ $A, B\in\mathcal{R}$ に収束するとする。このとき、$\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ となることを、$\epsilon-\delta$ 論法を用いて示したい。

(1). $\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ の定義を述べよ。

(2). $\lim_{x\to 0-0} f(x)+g(x)=A+B$ を $\epsilon-\delta$ 論法を用いて示せ。

問題 3.

$f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ を $x\in\mathcal{R}$ に対して、$f(x):=2x^2+x-7$ で定義する。f が、$x_0=2$ で連続であることの証明を与えたい。

(1). f が、$x_0=2$ で連続であることの $\epsilon-\delta$ 論法による定義を述べよ。

(2). f が、$x_0=2$ で連続であることの $\epsilon-\delta$ 論法による証明を与えよ。

問題 4.

$f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ を $x\in\mathcal{R}$ に対して、$f(x):=x^3-2$ で定義する。f が、$\mathcal{R}$ 上連続であることの証明を与えたい。

(1). f が、$\mathcal{R}$ で連続であることの $\epsilon-\delta$ 論法による定義を述べよ。

(2). f が、$\mathcal{R}$ で連続であることの $\epsilon-\delta$ 論法による証明を与えよ。

問題 5.

関数 $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$, $g:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ は $x\to\infty$ のときにそれぞれ $A, B\in R$ に収束するとする。次の 2 条件を仮定する。

(A) $B<0$ である。

(B) すべての $x\in\mathcal{R}$ に対して、$g(x)<\frac{1}{2}B$ となる。

このとき、$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ となることを $\epsilon-\delta$ 論法を用いて示せ。

問題 6.

$f:(-1,1)\to\mathcal{R}$ は、ある定数 $C>0$ が存在して、任意の $x, x'\in(-1,1)$ に対して

$$(L)|f(x)-f(x')|\le C|x-x'|^{\frac{2}{3}}$$

を満すとする。このとき、f は、$(-1,1)$ 上一様連続である事を示せ。なお、どこで (L) を用いたのかをわかるように証明を書くこと。

問題 7.

$f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ を $x\in\mathcal{R}$ に対して

$$f(x):=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

で定義する。f は $x=0$ で連続であるかを考察し、$\epsilon-\delta$ 論法による証明を与えよ。

問題番号
1

(4) $[0,4]$ (5) π (6) 0 (7) $\log_a e$ $\left(\text{または}\ \dfrac{1}{\log a}\right)$ (8) 0

(9) 1 (10) 2 (11) $\alpha = 4$

(12) $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists N_\epsilon \in \mathcal{N}$ $s.t.$ $\forall n \in \mathcal{N}$ に対して $n \geq N_\epsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$

(13) $\exists \epsilon > 0$ $s.t.$ $\forall N \in \mathcal{N}$ に対して $\exists n \in N$ $s.t.$ $n \geq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \epsilon$

(14)

(a) $\forall k > 0$ に対して $\exists \delta > 0$ $s.t.$ $\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$|x-1| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

(b) $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists M > 0$ $s.t.$ $\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$$

(c) $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists M > 0$ $s.t.$ $\forall x \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ に対して

$$0 < x - 1 < \delta \Rightarrow |f(X) - A| < \epsilon$$

(15)

(a), (b) 講義ノート参照

(c) $I = \mathcal{R}$ とし、$f : I \to \mathcal{R}$ を $f(x) = x^2\,(x \in I)$ で定める

$I = (0,1)$ とし、$f : I \to \mathcal{R}$ を $f(x) = \frac{1}{x}\,(x \in I)$ で定める

(16) $f(x) := -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ $(x \in (0,1))$

$f(x) := \sin(\pi x)\,(x \in (0,1))$

(17) $a = -2$

(18) 講義ノートを参照

コメント

(4),(5),(7),(8),(13),(14) は高校の範囲をほとんどこえていない。

出来が悪かったのは、(10), (12)(c), (13)

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ の主張をかくのだから $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義の否定をかけということ。

(12)(c) I をきちんと明記しないとだめ。関数 (写像) は <u>定義域</u> と <u>値域</u> を書かなければいけない。

(13) 最大値はあって最小値がないのだから下限が $x = 0$ or $x = 1$ で、達成されるような関数を考えればよい。

問題番号
2

1. $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\delta_\epsilon$ $s.t.$ $\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (A+B)| < \epsilon$$

2. 今、$\forall\epsilon > 0$ に対して $\epsilon_f := \dfrac{1}{2}\epsilon$, $\epsilon_g := \dfrac{1}{2}\epsilon$ とする。すると、共に、$\epsilon_f > 0, \epsilon_g > 0$ であり、その一方、仮定から、$\lim_{x\to 0-0} f(x) = A$, $\lim_{x\to 0-0} g(x) = B$ が、それぞれ言えるので、それぞれ、ある δ_f, δ_g が存在し、
$\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon_f$$
$\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - B| < \epsilon_g$$
が成立する。したがって、改めて、
$\delta_\epsilon := \min(\delta_f, \delta_g)$ [*3] とし、$\epsilon_f := \dfrac{1}{2}\epsilon$, $\epsilon_g := \dfrac{1}{2}\epsilon$ である事を利用すれば、
$\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{1}{2}\epsilon$$
$\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{1}{2}\epsilon$$
が成立する。そして、一般に、$|f(x) - A| < \dfrac{1}{2}\epsilon$, $|g(x) - B| < \dfrac{1}{2}\epsilon$ ならば、
$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x)) - (A+B)| &= |(f(x)-A) + (g(x)-B)| \\ &\le |(f(x)-A)| + |(g(x)-B)| \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\ &= \epsilon\end{aligned}$$
が成立するので、
$\forall\epsilon_\epsilon > 0$ に対して $\exists\delta$ $s.t.$ $\forall x < 0 \in (-1,1)\setminus\{0\}$ に対して
$$|x-0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (A+B)| < \epsilon$$
となるが、これが示したい $\lim_{x\to 0-0} f(x) + g(x) = A+B$ の定義である。

[*3] δ_f と δ_g の大きくない方を δ_ϵ とする。

問題番号 3

1. $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \delta_\epsilon \; s.t. \; \forall x \in \mathcal{R}$ に対して
$|x-2| < \delta_\epsilon \Rightarrow |(2x^2+x-7)-3| < \epsilon$

2. $\forall \epsilon > 0 \in \mathcal{R}$ に対して δ_ϵを、次のように定める
$$\delta_\epsilon := \begin{cases} 1 & (\epsilon \geq 11) \\ \frac{1}{11}\epsilon & (\epsilon < 11) \end{cases}$$
そして、次の様に、ϵ の値によって、場合分けして確認する:
($\epsilon \geq 11$ **の場合**) $\delta_\epsilon = 1$ なので、前提となる $|x-2| < \delta_\epsilon$ から $|x-2| < 1$ となる。この時、
$$\begin{aligned} |f(x)-3| &= |(2x^2+x-7)-3| \\ &= |2x^2+x-10| \\ &= |2(x-2)^2+9(x-2)| \\ &\leq 2|x-2|^2+9|x-2| \\ &< 2+9 \\ &= 11 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$
となるので、$|f(x)-f(2)| < \epsilon$ となる。
($\epsilon < 11$ **の場合**) $\delta_\epsilon = 1$ なので、前提となる $|x-2| < \delta_\epsilon$ は、$|x-2| < \frac{1}{12}\epsilon < 1$ となる。この時、
$$\begin{aligned} |f(x)-f(2)| &= |f(x)-3| \\ &= |(2x^2+x-7)-3| \\ &= |2x^2+x-10| \\ &= |2(x-2)^2+9(x-2)| \\ &\leq 2|x-2|^2+9|x-2| \\ &< 2|x-2|+9|x-2| \\ &= 11|x-2| \\ &< 11\delta_\epsilon \\ &= 11\left(\frac{1}{11}\epsilon\right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$
となるので、$|f(x)-f(2)| < \epsilon$ となる。
よって、任意の ϵ に対して、上記の様に δ_ϵ を定めると、$|f(x)-f(2)| < \epsilon$ が成立するので、$f(x)$ は $x=2$ で連続である。

問題番号
4

1. $\forall x_0 \in \mathcal{R}$ に対して

   $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \delta_\epsilon \;\; s.t. \;\; \forall x \in \mathcal{R}$ に対して

   $$|x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

2. $\forall \epsilon > 0 \in \mathcal{R}$ に対して δ_ϵを、次のように定める

   $$\delta_\epsilon := \begin{cases} 1 & (\epsilon \geq 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2) \\ \dfrac{1}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\epsilon & (\epsilon < 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2) \end{cases}$$

   そして、次の様に、ϵ の値によって、場合分けして確認する:

   ($\epsilon \geq 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2$ **の場合**) $\delta_\epsilon = 1$ なので、前提となる $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ から $|x - x_0| < 1$ となる。この時、

   $$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^3 - x_0^3| \\ &= |(x - x_0)^3 + 3x_0(x - x_0)^2 + 3x_0^2(x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0|^3 + 3|x_0||x - x_0|^2 + 3|x_0|^2|x - x_0| \\ &< 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

   となるので、$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ となる。

   ($\epsilon < 1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2$ **の場合**) $\delta_\epsilon = \dfrac{1}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\epsilon$ なので、前提となる $|x - x_0| < \delta_\epsilon$ から $|x - x_0| < \frac{1}{1+3|x_0|+3|x_0|^2}\epsilon < 1$ となる。この時、

   $$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^3 - x_0^3| \\ &= |(x - x_0)^3 + 3x_0(x - x_0)^2 + 3x_0^2(x - x_0)| \\ &\leq |x - x_0|^3 + 3|x_0||x - x_0|^2 + 3|x_0|^2|x - x_0| \\ &< |x - x_0| + 3|x_0||x - x_0| + 3|x_0|^2|x - x_0| \\ &= (1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2)|x - x_0| \\ &= (1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2)\frac{1}{(1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2)}\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

   となるので、$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ となる。

   よって、任意の ϵ に対して、上記の様に δ_ϵ を定めると、$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ が成立するので、$f(x)$ は $x = x_0$ で連続である。

   更に、これは、任意の $x_0 \in \mathcal{R}$ で成立するので、$f(x)$ は、$\mathcal{R}$ の全てで、連続である。

問題番号
5

与えられた条件より、任意の x に対して、

$$g(x) < \frac{1}{2}B < 0$$

である。この事から、任意の x に対して、

$$g(x) \cdot B > \frac{1}{2}B^2 > 0$$

即ち、

$$0 < \frac{1}{g(x) \cdot B} < \frac{2}{B^2}$$

である事に注意する。

今、任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\epsilon_f := \frac{|B|}{4}\epsilon$, $\epsilon_g := \frac{|B|^2}{4|A|}\epsilon$ とすると、$\epsilon_f > 0$, $\epsilon_g > 0$ であるので、$f(x)$, $g(x)$ が、$x \to \infty$ の時、それぞれ、A, B に収束する事により、それぞれ、M_f, M_g が存在し、$x_f > M_f$, $x_g > M_g$ ならば、$|f(x_f) - A| < \epsilon_f$, $|g(x_g) - B| < \epsilon_g$ が成立する。そこで、改めて、$M_\epsilon := \max(M_f, M_g)$ とすると、$x > M_\epsilon$ ならば、$|f(x_f) - A| < \frac{|B|}{4}\epsilon$, $|g(x_g) - B| < \frac{|B|^2}{4|A|}\epsilon$ となる。これより、$x > M_\epsilon$ の時、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{1}{g(x) \cdot B}(B \cdot f(x) - g(x) \cdot A)\right| \\
&< \frac{2}{B^2}|B \cdot f(x) - B \cdot A + B \cdot A - g(x) \cdot A| \\
&\leq \frac{2}{|B|}|f(x) - A| + \frac{2|A|}{B^2}|g(x) - B| \\
&< \frac{2}{|B|}\left(\frac{|B|}{4}\epsilon\right) + \frac{2|A|}{B^2}\left(\frac{|B|^2}{4|A|}\epsilon\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

したがって、$\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists M_\epsilon > 0 \ \ s.t.$

$$\forall x > M_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| < \epsilon$$

が成立するので、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

となる。

問題番号
6

今、任意の $\epsilon > 0$ に対し、$\delta_\epsilon := \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{3}{2}}$ とする。すると、$|x - x'| < \delta_\epsilon$ の時、

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x')| &\leq C|x - x'|^{\frac{2}{3}} \qquad (\because (L))\\ &< C(\delta_\epsilon)^{\frac{2}{3}}\\ &= C\left(\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\\ &= C\left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{1}\\ &= \epsilon\end{aligned}$$

なので、$|f(x) - f(x')| < \epsilon$ となる。これは、$f(x)$ が、点 $x = x'$ で連続である事を意味するが、これが、$x' \in (-1, 1)$ となる任意の x' で成立するので、$f(x)$ は、区間 $(-1, 1)$ で連続である。

更に、δ_ϵ は、ϵ のみで定まり、x' とは無関係なので、$f(x)$ は、区間 $(-1, 1)$ で、一様連続である。

問題番号
7

示すこと

$\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \delta_\epsilon$ $s.t.$ $\forall x \in \mathcal{R}$ に対して

$$|x - 0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \epsilon$$

1. $\forall x \in \mathcal{R}$ に対して
   $x = 0$ **のとき** $|f(x)| = |f(0)| = 0 = |x|$
   $x \neq 0$ **のとき** $|f(x)| = \left|x \cos \dfrac{1}{x}\right| \leq |x| \qquad \left(\because \left|\cos \dfrac{1}{x}\right| \leq 1\right)$
   より、
   $$|f(x)| \leq |x| \qquad \text{—(*)}$$
   が成り立つ。
2. $\forall \epsilon > 0$ に対して $\delta := \epsilon > 0$ と置く。$\forall x \in \mathcal{R}$ に対して
   $|x - 0| < \delta$ **ならば**
   $$\begin{array}{rcll} |f(x) - f(0)| & = & |f(x)| & (\because f(x) = 0) \\ & \leq & |x| & (\because (*)) \\ & < & \delta & (\because |x - 0| < \delta) \\ & = & \epsilon & \end{array}$$
   すなわち、$|f(x) - f(0)| < \epsilon$ となるので、f は $x = 0$ で連続である。

コメント

<u>1.</u> を使わずに示すなら、次のようになる:

$\forall \epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon > 0$ とおくと、$\forall x \in \mathcal{R}$ に対して $|x - 0| < \delta$ ならば、

$x = 0$ **のとき** $|f(x) - f(0)| = |f(0) - f(0)| = 0 < \epsilon$

$x \neq 0$ **のとき**

$$\begin{array}{rcll} |f(x) - f(0)| & = & \left|x \cos \dfrac{1}{x}\right| & \\ & \leq & |x| & \left(\because \left|\cos \dfrac{1}{x}\right| \leq 1\right) \\ & < & \delta & (\because |x - 0| < \delta) \\ & = & \epsilon & \end{array}$$